

Bewertung der Nährstoffzufuhr durch Fuzzy Sets

B. Wirsam

Evaluation of nutrient intake by fuzzy sets

Zusammenfassung: Fuzzy-Sets sind besonders gut geeignet, die Zufuhr eines Nährstoffes zu bewerten. Für die Bewertung mehrerer Nährstoffe erweist sich das harmonische Mittel der einzelnen Fuzzy-Werte als angemessener Kompromiß. Die Mittellung über alle Nährstoffe ergibt den sogenannten Prerow-Wert, der zur Beurteilung des Ernährungsstatus herangezogen werden kann und dessen Maximierung auch geeignet ist, Ernährung zu optimieren.

Summary: Fuzzy sets are especially suitable to evaluate the intake of a nutrient. For the evaluation of several components, the harmonic mean of the individual fuzzy values proves to be the best compromise. The mean of all nutrients results in the so called Prerow value, which can be used for the evaluation of the nutrition status. Maximizing the Prerow value is suitable for optimizing nutrition.

Schlüsselwörter: Nährstoffzufuhr – Fuzzy-Sets – Prerow-Wert – Ernährungs-Optimierung

Key words: Nutrient intake – fuzzy sets – Prerow value – optimization of nutrition

1. Scharfe Grenzen

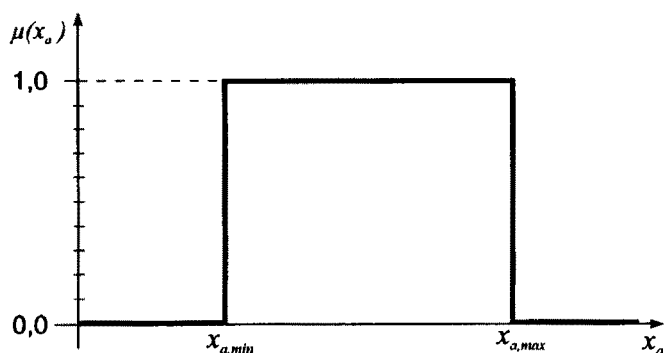
Die Empfehlungen für die Nährstoffzufuhr der *Deutschen Gesellschaft für Ernährung* (1) werden alters- und geschlechtsspezifisch bei den meisten Nährstoffen als Mindestbedarf, bei anderen auch als Höchstbedarf angegeben. Bei wieder anderen sind beide Grenzwerte zu finden.

Im Rahmen der linearen Optimierung (2) werden diese Grenzen für einen Nährstoff a in Form von Ungleichungen benutzt.

$$(1.1) \quad x_{a,\min} \leq x_a \leq x_{a,\max}$$

Dabei ist $x_{a,\min}$ der Mindestbedarf und $x_{a,\max}$ der Höchstbedarf einer Person an dem Nährstoff a in einem betrachteten Zeitintervall. Die Nährstoffzufuhr x_a soll zwischen diesen beiden Grenzwerten liegen, was durch (1.1) beschrieben wird.

Die zugelassene Menge ist scharf definiert und hat als „Fuzzy Set“ das in Abbildung 1 gezeichnete Aussehen. Die Bewertung der Nährstoffzufuhr zerfällt in einen zugelassenen und einen nicht zugelassenen Bereich.

Abb. 1. „Fuzzy Set“
„Empfohlene Zufuhr“.

Dabei ist

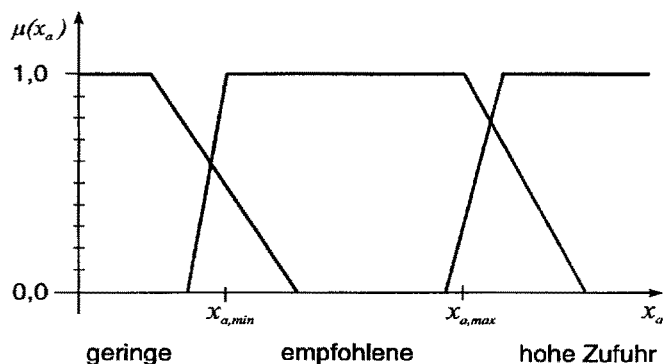
$$(1.2) \quad \mu(x_a) = \begin{cases} 1, & \text{für } x_{a,min} \leq x_a \leq x_{a,max} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\mu(x_a)$ wird als Zugehörigkeitsgrad von x_a zur Menge „Empfohlene Zufuhr“ für den Nährstoff a bezeichnet.

Bei der Lösung von Optimierungsproblemen bereiten diese scharf definierten Grenzen immer wieder Probleme und führen dazu, daß es bisweilen keine Lösungen der Optimierungsaufgabe gibt. In der post-optimalen Analyse von Ergebnissen wird darüber hinaus häufig diskutiert, wie durch Aufweichung dieser Grenzen, d.h. durch Erweiterung des zugelassenen Bereiches, die Erreichung der Optimierungsziele verbessert werden kann.

2. Unscharfe Größen

Die Soll-Zufuhr stellt in der Praxis meist eine unscharfe Größe dar (3), die mit mehreren Termen (unscharfen Mengen) und deren Zugehörigkeitsgraden definiert werden können. Dabei wird, wie in Abbildung 2 sichtbar, festgelegt, bis zu welchem Grad einzelne Werte den verschiedenen Termen (z.B. geringe, empfohlene, hohe Zufuhr) zugehören. Auf diese Weise erfolgt gleichzeitig eine Bewertung der Zufuhr.

Abb. 2. Fuzzy Sets „Soll
Zufuhr“.

Die Anwendung solcher Fuzzy Sets mit verschiedenen Termen ist für Ernährungsanalysen, für Bewertungen und die verbale Interpretation gut geeignet. Als Datenbasis im Rahmen von Optimierungsrechnungen führen sie jedoch durch das Springen von einem Term zu anderen zu komplizierter Vorgehensweise. Sie werden deshalb hier nicht weiter untersucht.

3. Fuzzy Set „Optimale Zufuhr“ und Type-2-Fuzzy-Sets

Für die Anwendung eines Fuzzy Sets im Rahmen einer durchgängigen Bewertung und als Datenbasis für Optimierungsrechnungen ist es sinnvoll, einen über den gesamten Wertebereich definierten Zugehörigkeitsgrad ähnlich wie in Abbildung 3 zu benutzen, wobei x_a wieder die Menge des zugeführten Nährstoffes ist.

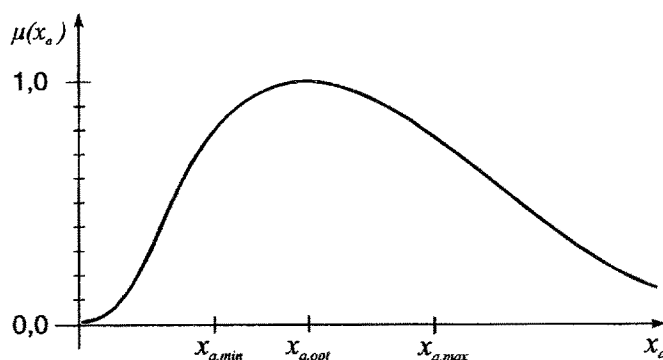


Abb. 3. Fuzzy Set „Optimale Zufuhr“

Der Zugehörigkeitsgrad $\mu(x_a)$ gibt hierbei an, inwieweit der Wert x_a zur Menge „Optimale Zufuhr“ gehört. Die Optimalität ist bei diesem Fuzzy Set eine der definierten Menge innewohnende Eigenschaft. Das Maximum mit dem Wert 1 gibt die anzustrebende Zufuhr an, die Struktur der Kurve besagt, wie sich der Zugehörigkeitsgrad zum Fuzzy Set „Optimale Zufuhr“ bei Variation der Menge x_a verändert. Insbesondere läßt sich ablesen, wie sehr sich die Bewertung der Zufuhr ändert, wenn, vom Optimum ausgehend, die Menge verkleinert oder vergrößert wird. Die klassischen Nebenbedingungen verlieren ihre Gültigkeit, die Grenzen werden unscharf und nur noch die steilen Flanken der Kurve der Zugehörigkeitsgrade erinnern an sie.

Um den Zugehörigkeitsgrad $\mu(x_a)$ verbal zu interpretieren, werden nun Type-2-Fuzzy-Sets über das Type-1-Fuzzy-Set „Optimale Zufuhr“ definiert (5). Die Zugehörigkeitsgrade μ aus dem Fuzzy-Set „Optimale Zufuhr“ sind nun der neue Wertebereich des Type-2-Fuzzy-Sets.

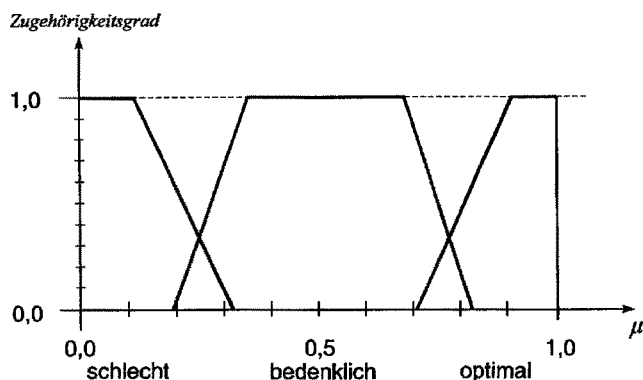


Abb. 4. Type-2-Fuzzy-Set.

Die Benutzung eines Type-2-Fuzzy-Sets hat den großen Vorteil, daß für alle verschiedenen Nährstoffe nur ein Fuzzy-Set für die verbale Interpretation und die Bewertung notwendig ist, da der Type-2-Fuzzy-Set unabhängig von der Gestalt des Type-1-Fuzzy-Sets definiert ist.

4. Operationen

Betrachtet man nicht nur einen Nährstoff, sondern z.B. zwei Nährstoffe in einem Nahrungsmittel, so erhält man auch zwei Fuzzy Sets, die jeweils angeben, welcher Zugehörigkeitsgrad zur Menge „Optimale Zufuhr“ bei der betrachteten Menge x des Nahrungsmittels für den Nährstoff a oder den Nährstoff b erreicht wird.

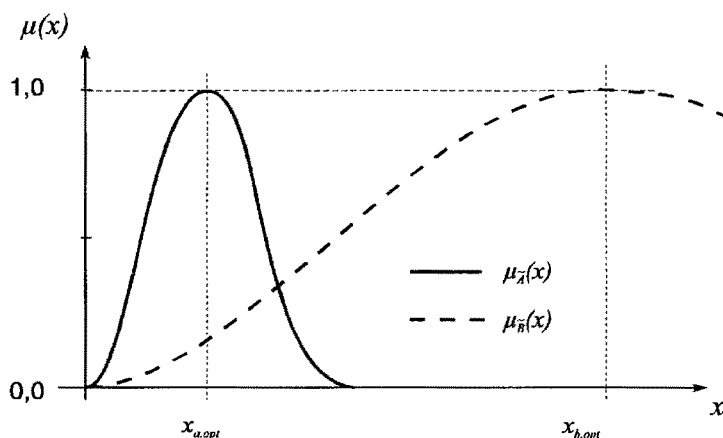


Abb. 5. Zwei Fuzzy Sets „Optimale Zufuhr“

In Abbildung 5 bezeichnet x die Menge des Nahrungsmittels, das Nährstoff a und b enthält. \tilde{A} ist der Fuzzy Set für Nährstoff a und wird durch $\mu_{\tilde{A}}(x)$ bestimmt, \tilde{B} ist der Fuzzy Set für Nährstoff b und wird durch $\mu_{\tilde{B}}(x)$ bestimmt.

Gefragt ist, wie die Menge x des Nahrungsmittels, das Nährstoff a **und** Nährstoff b enthält, zu bewerten ist.

Im Bereich der gewöhnlichen Mengen wäre die zur logischen Verknüpfung „und“ zugehörige Mengenoperation der Durchschnitt der Einzelmengen. Im Rahmen der Fuzzy Logik wird der Durchschnitt \tilde{C} zweier Mengen \tilde{A}, \tilde{B} wie folgt definiert

$$(4.1.) \quad \tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B} \quad \text{mit} \\ \mu_{\tilde{C}}(x) := \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$$

Das bedeutet, daß der Minimum-Operator auf die Zugehörigkeitsgrade der einzelnen Nährstoffe angewendet werden muß, um den Zugehörigkeitsgrad des Nahrungsmittels, das Nährstoff a und b enthält, zu dem Fuzzy Set „Optimale Zufuhr“ zu erhalten.

Dies ist jedoch nur eine in der Fuzzy Logik zugelassene Möglichkeit der Darstellung der logischen Verknüpfung „und“. Es gibt zahlreiche weitere Möglichkeiten von „und“-Operatoren, von denen lediglich gefordert wird, daß sie sich beim Übergang zu gewöhnlichen Mengen auch wie die gewöhnliche logische Verknüpfung „und“ verhalten.

Tatsächlich zeigt der Minimum-Operator bei der Anwendung auf Probleme der Bewertung der Nährstoffzufuhr und der Ernährungsoptimierung zwei schwerwiegende Nachteile. Zum einen ist er völlig unsensitiv gegen alle am Minimum nicht beteiligten Fuzzy Sets, d.h. Kompensationseffekte können mit ihm nicht abgebildet werden. Zum anderen ist er i.a. nicht glatt, was zu numerischen Schwierigkeiten bei der Anwendung von Optimierungsalgorithmen führen kann. Trotz dieser Nachteile für eine Optimierung ist der Minimum-Operator für die Ernährungsanalyse und die Bewertung von großer Bedeutung.

Von einem „und“-Operator für Anwendungen in der Ernährung wird verlangt, daß er auf jeden Fall den Zugehörigkeitsgrad 0 erzeugt, wenn auch nur ein einziger Zugehörigkeitsgrad eines einzelnen Nährstoffes den Wert 0 besitzt, denn die Toxizität durch Unter- oder Überdosis eines Nährstoffes innerhalb der Gesamtnahrung über den betrachteten Zeitraum wird kaum durch die anderen Zugehörigkeitsgrade kompensiert werden können. Für den Fall gleicher oder sehr dicht beieinanderliegender Ergebnisse des Minimum-Operators wird verlangt, daß die durchschnittliche Güte der übrigen, nicht am Minimum beteiligten Nährstoffe den Ausschlag gibt. Es wird jedoch auch verlangt, daß dieser Operator möglichst dicht am Minimum-Operator liegt, weil die Güte einer Ernährung in der Regel doch durch das schwächste Glied in der Einzelbewertung der Nährstoffe wesentlich bestimmt wird. Von den Durchschnittsoperatoren, die für eine „und“-Verknüpfung verwendet werden können, fällt der Operator der arithmetischen Mittelung wegen Verletzung gleich zweier Forderungen aus. Die beiden Operatoren „geometrische Mittelung“ und „harmonische Mittelung“ zeigen die gewünschten Eigenschaften und sollen deshalb hier näher untersucht werden.

5. Geometrisches und harmonisches Mittel

Für zwei Fuzzy Sets sind diese beiden Mittelungen wie folgt definiert.
Das geometrische Mittel:

$$(5.1) \quad \mu_{geo}(x) := \sqrt{\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}$$

Das harmonische Mittel:

$$(5.2) \quad \mu_{harm}(x) := \frac{2\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)}{\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)} = \frac{2}{\frac{1}{\mu_{\tilde{A}}(x)} + \frac{1}{\mu_{\tilde{B}}(x)}}$$

Im Falle von n Fuzzy Sets \tilde{A}_i ($i = 1, \dots, n$) sind die beiden Mittel definiert als

$$(5.3) \quad \mu_{geo}(x) := \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \mu_{\tilde{A}_i}(x)}$$

$$(5.4) \quad \mu_{harm}(x) := \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_{\tilde{A}_i}(x)}}$$

Die drei Operatoren Minimum, geometrisches Mittel und harmonisches Mittel sind für den Fall zweier Fuzzy Sets in Abbildung 6 dargestellt.

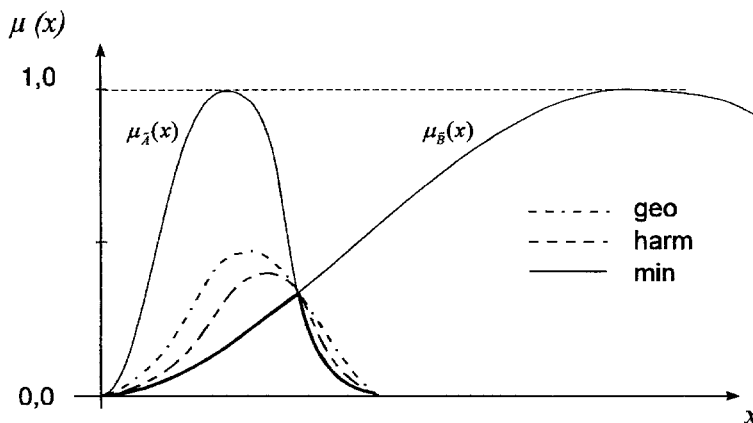


Abb. 6. Die Wirkung der Operatoren Minimum, harmonisches Mittel und geometrisches Mittel.

Wie anhand der Abbildung 6 zu vermuten ist, gilt ganz allgemein, daß das geometrische Mittel größer als das harmonische Mittel und dies wiederum natürlich größer als das Minimum ist. Das harmonische Mittel ist zu bevorzugen, da es sich dem Minimum besser anschmiegt. Es berücksichtigt Kompensationseffekte. Im Beispiel aus Abbildung 6 wird das Optimum bei Anwendung des Minimum-Operators durch Wechsel zur harmonischen Mittelung etwas nach links verschoben. Dies entspricht auch der Vorstellung, daß der größere Zuwachs des Zugehörigkeitsgrades $\mu_{\bar{A}}(x)$ den schwachen Abfall von $\mu_{\bar{B}}(x)$ bei kleineren x -Werten überkompensiert.

Beim Vergleich von geometrischer und harmonischer Mittelung bei Anwendung sehr vieler Variablen – so wie es ja bei Ernährungsbewertungen der Fall ist – fällt auf, daß die geometrische Mittelung viel schwächer auf einzelne Ausreißer nach unten reagiert als die harmonische Mittelung. Dieses sensible Reagieren auf Ausreißer nach unten ist aber gerade eines der wichtigen Kriterien für einen „und“-Operator im Rahmen der Ernährungstheorie.

Von allen zur Verfügung stehenden „und“-Operatoren hat sich damit der Operator der harmonischen Mittelung als der am besten geeignete herausgestellt.

Auf der Basis der Fuzzy Sets „Optimale Zufuhr“ wird nun der Prerow-Wert (PW) als das harmonische Mittel über die Zugehörigkeitsgrade zum Fuzzy Set „Optimale Zufuhr“ aller in einer Nahrung enthaltenen Nährstoffe definiert:

$$(5.5) \quad PW = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_{\bar{A}}(x_i)}}$$

wobei n die Anzahl der betrachteten Nährstoffe ist und $\mu_{\bar{A}}(x_i)$ der Zugehörigkeitsgrad zum Fuzzy Set „Optimale Zufuhr“ des Nährstoffes i bei Zuführung der Menge x_i auf der Basis der DGE-Empfehlung.

Dieser Wert eignet sich zusammen mit den Fuzzy Werten der einzelnen Nährstoffe für die Bewertung und für die Ernährungsanalyse.

6. Beispiel

Die bisherige Vorgehensweise soll nun an einem konkreten, jedoch stark vereinfachten Beispiel erläutert werden. Es soll untersucht werden, welche Zugehörigkeitsgrade den Fuzzy Set „Optimale Zufuhr“ beim Verzehr von Buttermilch bestimmen und wie die besprochenen Operatoren auf die Fuzzy Sets wirken.

Es steht außer Frage, daß die hier angeführte Buttermilch allein nicht als optimales Nahrungsmittel eingesetzt werden kann. Das Beispiel soll aus methodischen Gründen lediglich stark vereinfacht aufzeigen, wie die Zufuhrmenge der Nährstoffe als Fuzzy-Set dargestellt werden, wie die Operatoren wirken und zu welchem Optimum (= Kompromiß) sie führen. Um die Wirkung grafisch deutlich darzustellen, mußten zwei weit auseinanderliegende Fuzzy-Sets (Protein und Energie) eines schon aus diesen Gründen nicht optimalen Lebensmittels gewählt werden.

Nach Herstellerangaben (Staatliche Molkerei Weihenstephan) enthalten 100 g frische Buttermilch u.a. 3,2 g Proteine und 40 kcal (169 kJ) Energie.

Auf der Basis der DGE-Empfehlung wird für einen 50jährigen Mann mit Normalgewicht eine Energiezufuhr von 2400 kcal/Tag (10 MJ) und eine Proteinzufuhr von

53 g als optimal angesehen. Für die Proteinzufuhr würden bereits 1,67 l Buttermilch ausreichen, um die empfohlene Zufuhr zu erreichen, dagegen müßte zur Deckung der Energiezufuhr die unrealistische Menge von 6 l Buttermilch getrunken werden.

Die DGE-Empfehlung stellt jeweils das Maximum der Kurve dar. Die genaue Form der Kurve ergibt sich aus der Festlegung weiterer Punkte gemäß der Type-2-Fuzzy-Sets und durch Approximation durch die in der Fuzzy Theorie für solche Zwecke vorgesehenen Parabeln (4).

Auf die so ermittelten und in Abbildung 7 dargestellten Zugehörigkeitsgrade werden die besprochenen Operatoren „Minimum“, „harmonisches“ und „geometrisches Mittel“ angewandt. Die Ergebnisse sind ebenfalls als Kurve in der Abbildung 7 eingezeichnet. Es ist wieder klar zu erkennen, daß bei stark asymmetrischer Verteilung der Zugehörigkeitsgrade der Operator der harmonischen Mittelung dichter am Minimum-Operator liegt als der Operator der geometrischen Mittelung. Beide Operatoren führen zu einem Maximum, das gegenüber dem Maximum des Minimumoperators etwas nach rechts verschoben ist.

Das Maximum des Zugehörigkeitsgrades zum Fuzzy Set „Optimale Zufuhr von Energie und Proteinen“ auf der Basis des harmonischen Operators stellt einen Kompromiß dar und gibt als Resultat den Wert 4,6 l Buttermilch und den Zugehörigkeitsgrad 0,75 an. Der Type-2-Fuzzy-Set ordnet diesem Zugehörigkeitsgrad ziemlich eindeutig den Term „bedenklich“ zu. Dies ist auch einleuchtend, da nicht gleichzeitig eine gute Versorgung mit Proteinen und Energie mit Buttermilch alleine auf Dauer möglich ist.

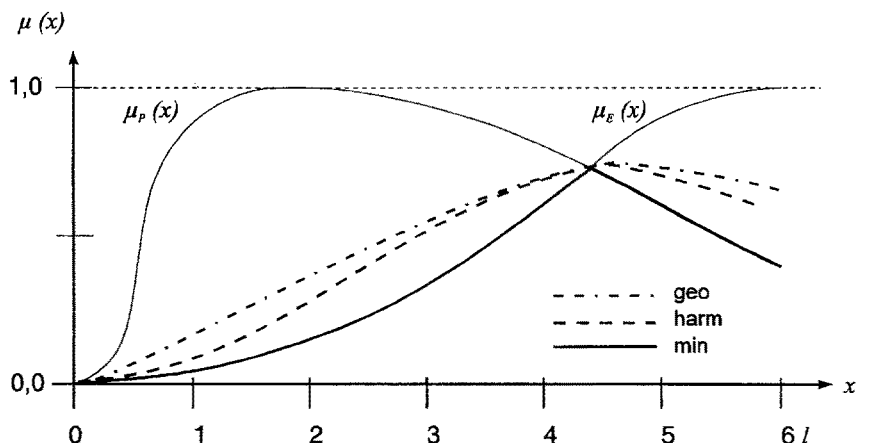


Abb. 7. Zugehörigkeitsgrad $\mu_P(x)$ (für Proteinzufuhr), $\mu_E(x)$ (für Energiezufuhr) zum Fuzzy Set „Optimale Zufuhr“, sowie das Ergebnis der Operatoren „Minimum“, „harmonisches Mittel“ und „geometrisches Mittel“ bei der Zufuhr von Buttermilch.

7. Ausblick

Bewertungs- und Entscheidungsprobleme in der menschlichen Ernährung betrachten eine komplizierte zeitliche Folge unterschiedlicher Speisearten in Form von Gerichten, Menues, Mahlzeiten usw. Die dort möglichen Mengen- und Artenvariationen führen dann nicht zu relativ einfachen Kurven für die Fuzzy Sets und den sie definierenden Zugehörigkeitsgraden, sondern zu komplexen, n-dimensionalen hochgradig nichtlinearen Hyperflächen des Prerow-Wertes, die mit manchen Energieflächen in der Physik vergleichbar sind. Die Topologie dieser Landschaften ist ausschlaggebend dafür, mit welchen Algorithmen nach Erhebungen und Senken, Tälern und Gipfeln gesucht wird.

Durch zwei- und dreidimensionale Schnitte kann eine anschauliche Darstellung dieser Landschaften erreicht werden. Grafische Interpretationen über synergetische Ergänzungen von Nahrungsmitteln, Austauschbarkeit und Beiträge zur Vollwertigkeit sind möglich.

Bei der Anwendung auf reale Probleme der Ernährungsberatung sind neben den Fuzzy Sets für die Nährstoffe noch weitere Einflußgrößen wie individuelle Aversionen oder Präferenzen sowie Kosten usw. zu berücksichtigen.

Die Arbeit soll nachvollziehbar machen, wie man von den scharfen Grenzen bei der linearen Optimierung über die unscharfen Größen aus der Arbeit von Lehmann (1993) zu den von uns benutzten Fuzzy Sets gelangt.

Zwischenzeitlich konnten die beschriebenen Fuzzy Sets und die Operatoren erfolgreich für Ernährungsanalysen und Optimierungen mit verschiedenen Zielen angewandt werden.

Für ihr großes Interesse an dieser Arbeit und zahlreiche Diskussionen sei Dr. Renate Albat (Linden), Prof. Dr. Georg Karg (München) und Prof. Dr. Claus Leitzmann (Gießen) gedankt. Für die Überarbeitung des Manuskripts möchte ich Herrn Dozent Dr. Andreas Hahn (Hannover) danken.

Literatur

1. Deutsche Gesellschaft für Ernährung eV (Hrsg) (1991) Empfehlungen für die Nährstoffzufuhr. 5. Überarbeitung, Frankfurt / Main.
2. Karg G (1982) Optimale Ernährung in der Gemeinschaftsverpflegung mit Hilfe der linearen und quadratischen Optimierung, Ernährungs-Umschau 29:260–268
3. Lehmann M, Meier N, Horst S (1993) Ernährungsanalyse mit Methoden der Fuzzy Logik, Berichte der GIL, Bd 3, München
4. Mayer A, Mechler B, Schlindwein A, Wolke R (1993) Fuzzy Logic, Addison-Wesley Publishing Company, Bonn; Paris; Reading, Mass. [u.a.]
5. Zadeh, LA, (1973a) The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Memorandum ERL-M 411, Berkeley.

Eingegangen 22. Februar 1994
akzeptiert 25 Juli 1994

Anschrift des Verfassers:

Bernd Wirsam, Firma Albat & Wirsam, Konrad-Adenauer-Str. 15, 35440 Linden